Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Existencia y estabilidad asintótica para una ecuación viscoelástica no lineal con amortiguamiento fuerte

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Carole HUAMÁN ORIUNDO

ASESOR

Dr. Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Huamán, C. (2019). *Existencia y estabilidad asintótica para una ecuación viscoelástica no lineal con amortiguamiento fuerte*. Tesis para optar grado de Magíster en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor (dato opcional): 0000-0002-0516-9708

Código Orcid del asesor o asesores (dato obligatorio): 0000-0001-9944-4020

DNI del autor: 10601400

Grupo de investigación: Ecuaciones en Derivadas Parciales y Aplicaciones (GEINEDPA)

Institución que financia parcial o totalmente la investigación: UNMSM

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y coordenadas geográficas: Av. Venezuela 34 (12°03'30"S77°05'00"O). Av. Tupac Amaru 210 (12°01'11"S77°02'55"O).

Año o rango de años que la investigación abarcó: Julio 2012 – Setiembre 2019

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 3:00 p.m horas del día jueves veintiséis de setiembre del dos mil diecinueve, en el Aula UPG 1 de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por la Dra. María Natividad Zegarra Garay e integrado por los siguientes miembros, Dr. George José Baustista Sánchez (Jurado Evaluador), Mg. Willy Barahona Martínez (Jurado Evaluador), Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda (Jurado Informante) y el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA Y ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA UNA ECUACIÓN VISCOELÁSTICA NO LINEAL CON AMORTIGUAMIENTO FUERTE» presentada por la Bachiller Carole Huamán Oriundo para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición de la graduanda, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales la Bachiller Carole Huamán Oriundo respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando la Bachiller Carole Huamán Oriundo aprobada con el calificativo de excelente diecinueve (19)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura a la Bachiller Carole Huamán Oriundo**.

Siendo las 4:30 p.m horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. George José Bautista Sánchez
Miembro

Dra. María Natividad Zegarra Garay
Presidenta

Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda
Miembro

Mg. Willy Barahona Martínez
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

Dedicatoria

A mis padres: Victor y Feliciana
A mi hijo Jhon.

Agradecimentos

A Dios por guiarme en el buen camino, iluminarme y permitirme la culminación del presente trabajo
A mi Asesor, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, por su guía en el desarrollo de la tesis, por su apoyo, su tiempo, sus consejos y confianza en mi.
A mis Padres por haberme dado siempre su apoyo en todo momento. Por creer en mi y brindarme todo su amor estando siempre a mi lado.
A mi hermano, por su constante apoyo y consejos siempre acertados.
Al jurado por su apoyo y sugerencias en el presente trabajo.
A mis amigos y amigas de la Universidad, por su apoyo incondicional, por siempre estar listos para brindarme toda su ayuda, en especial a Teresa Q., Martha T., María M., Nancy, Tania, Carlos M., José A. y George B.
Con todo cariño a las personas que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por motivarme y darme la mano en todo momento.

Resumen

En este trabajo, consideramos el siguiente problema Integro-Diferencial con viscoelasticidad:

$$|u_t|^{\rho}u_{tt} - \triangle u - \triangle u_{tt} + \int_0^t g(t-\tau)\triangle u(\tau)d\tau - \gamma\triangle u_t = 0,$$

en un dominio limitado Ω con condicion de frontera tipo Dirichlet y valores iniciales. Probaremos la existencia y decaimiento exponencial bajo condiciones suficientemente diferentes en la función relajación mas que el propio estandard.

Palabras claves: decaimiento exponencial, término de memoria, técnica multiplicativa, problema viscoelástico.

Abstract

In this work, we consider the following integro-differential problem which appears in viscoelasticity:

$$|u_t|^\rho u_{tt} - \triangle u - \triangle u_{tt} + \int_0^t g(t-\tau)\triangle u(\tau)d\tau - \gamma\triangle u_t = 0,$$

on a bounded domain Ω with Dirichlet boundary condition and initial values. We prove the existence and exponential decay result under different sufficient conditions on the relaxation function than the "standard" ones.

Key Words: exponential decay, memory term, multiplier technique, viscoelastic problem.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo, desarrollaremos en forma didáctica y explícita la existencia de solución y la estabilidad asintótica, esto es, el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema viscoelástico no lineal con amortiguamiento fuerte, modelado por

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \displaystyle\int_0^T g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau - \gamma \Delta u_t = 0 & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \sum \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un abierto con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular, $T > 0$ un número real y $Q = \Omega \times (0,T)$ con frontera lateral denotada por $\sum = \Gamma \times (0,T)$, $\gamma \geq 0$ y ρ es un número verificando $0 < \rho < 2/(n-2)$, si $n \geq 3$ o $\rho > 0$ si $n = 1,2$; y el núcleo g satisfaciendo:

(H_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función acotada de clase C^1 tal que $1 - \displaystyle\int_0^\infty g(s)ds = l > 0$,

(H_2) $e^{\alpha t} g(t)$ y $e^{\alpha t} g'(t)$ con L^1 − norma sobre $(0,\infty)$ suficientemente pequeño y con $\alpha > 0$.

El estudio de problemas viscoelástico que se caracterizan por el término memoria que, es representado por el término integral y que tiene mucho que ver con la disipación de la ecuación, se puede ver en Fabrizio et al [9].

El desenvolvimiento de la teoría de viscoelasticidad se dio primeramente debido al uso de materiales poliméricos en diversos campos. La investigación de las propiedades viscoelástico de los polímeros es grandemente estimulada por la importancia práctica del comportamiento mecánico en el procesamiento y utilización de cauchos, fibras plásticas, entre otros, ver [12].

En viscoelasticidad la tensión en cualquier instante depende de todas las deformaciones soportadas en el pasado. Esta propiedad produce un tipo sutil de mecanismo disipativo, que es dado por la memoria. Algunas veces se les acopla a la ecuación hiperbólica una función positiva de clase C^∞(dada por una función $a(x)$), de tal forma que su estudio de comportamiento asintótico sea local, uno de los primeros trabajos fue en 1997 estudiado por A. Pérez S. ver [27] en su tesis de doctorado, ***"Decaimento de soluções de equações***

parcialmente viscoelásticas" modelado por,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \displaystyle\int_0^T g(t-\tau)Div(a(x)\nabla u(\tau))d\tau = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

La disipación, por el mismo mecanismo viscoelástico, es dada por la memoria y condiciones para el núcleo de la memoria $g(t)$, trabajándose el efecto de amortiguación tan solo en una parte de la frontera ω contenido en Ω para obtener el decaimiento exponencial. Entre otros trabajos que podemos citar de localmente amortiguados son [2, 13, 14, 25, 26].

En 2001, M.M. Cavalcanti et al [6], estudiaron ***"Existence and uniform decay rates for viscoelastic problem with nonlinear boundary damping"*** , modelado por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \displaystyle\int_0^T g(t-\tau)\Delta u(\tau))d\tau = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} - \displaystyle\int_0^T g(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(\tau)d\tau + f(u_t) = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde Ω es un domininio acotado de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$,$\Gamma_0$ y Γ_1 son cerrados. Los

autores prueban la existencia y unicidad de la solución por el método de Faedo-Galerkin haciendo primeramente una nueva formulación del problema y para el cálculo de la tasa de decaimiento polinomial y exponencial se utilizan el método de la energía, ver Zuazua [33].

En 2001, M.M. Cavalcanti et al [5] estudiaron ***"Existence and uniform decay for a non limear viscoelastic equation with strong damping"***, representado por el modelo (1.1), ellos prueban la existencia global de soluciones debiles y el decaimiento uniforme pero sin la hipótesis (H_2) en su lugar, existen contantes positivas ξ_1, ξ_2 tales que,$-\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq \xi_1 g(t)\, \forall t \geq 0$.

En 2005, K.M. Khaled M. et al [15], estudiaron ***"Uniform boundedness and stability for a viscoelastic problem"***, representado por el sistema (1.1).

En 2008, Salim A. et al [29] estudiaron ***"Exponential and polinomial decay for a quasilinear viscoelastic equation"***, representado por el sistema,

$$
\begin{cases}
|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \displaystyle\int_0^T g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = 0 & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\
u = 0 & \text{en } \Gamma \times (0,\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega.
\end{cases} \tag{1.4}
$$

Aquí los autores logran obtener el decaimiento exponencial sin imponer ninguna disipación interna o de frontera. Se comprueba que la disipación inducida por el termino memoria solo es suficiente para que la solución decae exponencialmente o polinomial. Para lograr esto, utilizan una modificación apropiada de la energía y algunas calidades de difusión e integrales.

En el presente trabajo estaremos considerando $\gamma \geq 0$, para mostrar la existencia de soluciones y para obtener las tasas de decaimiento uniformes de la energía, estaremos considerando el caso de que, $\gamma > 0$.

Cabe mencionar según el paper estudiado por M.M. Cavalcanti [5] que, los problemas relacionados con la ecuación,

$$
f(u_t)u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} = 0 \tag{1.5}
$$

son importantes no solo desde el punto de vista de una EDP, sino que representan un fenómeno físico en la Mecánica, por ejemplo cuando la densidad del material $f(u_t)$ es igual a 1, la ecuación (1.5) describe las vibraciones extensionales de varillas delgadas, vea A.H. Love [19] para los detalles físicos.

Cuando la densidad del material $f(u_t)$ no es constante, se trata de una varilla delgada que posee una superficie rígida y cuyo interior es de alguna manera permisible a deformaciones leves, tal que la densidad del material varía según la velocidad.

Podemos destacar también, el estudio de las ecuaciones similares a la dada en (1.5) , las placas viscoelasticas con memoria determinada por,

$$
u_{tt} - \Delta^2 u - \Delta u_{tt} + \int_0^T g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)d\tau = 0 \tag{1.6}
$$

Con relación al estudio de placas con memoria, ecuación (1.6), existen muchos trabajos entre otros podemos citar el trabajo de J.E. Lagnese [16], quien demostró que la energía decae a cero cuando el tiempo va hacia el infinito, introduciendo un mecanismo disipativo sobre la frontera del sistema; J. E. Muñoz et al [23] que en su trabajo prueba que la energía de primer y segundo orden, decae exponencialmente siempre y cuando que el núcleo de la memoria también decaiga exponencialmente, es decir, cuando el mecanismo de disipación único es dado por la función de relajación o núcleo de la memoria. Además, como estamos tratando con soluciones débiles, los mecanismo realizados en las referencias [23, 25, 26, 27] no son aplicables para nuestro caso por la presencia de la no linealidad, asumiendo que $\gamma > 0$ en (1.1), esto obliga introducir un término disipativo fuerte.

El estudio de existencia para soluciones débiles globales al problema (1.5), en el caso degenerado, es decir, cuando tenemos la ecuación.

$$K(x,t)u_{tt} - \Delta u + F(u) - \Delta u_t = 0 \tag{1.7}$$

y K puede anularse, fue estudiado por Ferreira y Pereira en [10]. Más recientemente, Ferreira y Rojas Medar [11] estudiaron la existencia de soluciones débiles al problema (1.1) cuando $g = 0$ y $\gamma > 0$, en dominios no cilíndricos.

En el estudio de nuestro trabajo resulta de agregar a la ecuación (1.5) el término memoria que es una disipación débil, un termino disipativo fuerte dado por $\gamma\Delta u_t$ y el término $F(u_t)$ considerando como una función no lineal. Para conseguir la existencia de soluciones globales al problema (1.1), utilizaremos el método estándar de Faedo Galerkin. Además, para el Decaimiento Exponencial usaremos el método de la Técnica Multiplicativa, donde obtenemos una tasa de decaimiento uniforme de la energía del sistema (1.1) dada por,

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx.$$

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:
En el capitulo (2) denominado Preliminares, presentamos las notaciones básicas y resultados principales que serán usados en los capitulos posteriores. En el capitulo (3) estudiamos la existencia de soluciones globales para el sistema (1.1). Finalmente en el capitulo (4) estudiamos el decaimiento exponencial asociado al sistema (1.1), usando el método de la técnica multiplicativa de la energía.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos resultados clásicos y definiciones de utilidad. Asumiremos otros reultados de análisis funcional por conocidos.

2.1. Espacios de Sobolev

2.1.1. Espacios L^p

Definición 2.1.1. ***(Espacios** L^p **)**. Sea Ω un abierto del $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones definidas en Ω con valores en K, donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, tales que $|u|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue en Ω.*

El espacio $L^p(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ para\ 1 \leq p < +\infty$$

y

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|, \ para\ p = +\infty,$$

es un espacio de Banach.

En el caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 2.1.1. *Si $u \in L^1(\Omega)$ entonces las integrales indefinidas de u son funciones continuas.*

Demostración. Ver [1]. □

Proposición 2.1.2. (Desigualdad de Young) *Sean $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ y $a, b > 0$. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Ver [20]. □

Proposición 2.1.3. (Desigualdad de Minkowski) - *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y f, g en $L^p(\Omega)$, entonces*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [20]. □

Proposición 2.1.4. (Desigualdad de Hölder) - *Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y tenemos las desigualdad*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [3]. □

Sigue como corolario de la Proposición anterior el siguiente resultado:

Corolario 2.1.1. (Desigualdad de Hölder generalizada) - *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, donde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ y $\dfrac{1}{p} \leq 1$. Entonces el producto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ y*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [3]. □

Además, se tienen los siguientes resultados:

i) $L^p(\Omega)$ es reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ es separable para todo $1 \leq p < +\infty$;

iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene inmersión continua y densa en $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

iv) Si (f_n) es una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ son tales que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ casi siempre en Ω.

(Ver [3])

Teorema 2.1.1. (Teorema de la Representación de Riesz) - *Sean $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ con $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. Entonces, existe una única $u \in L^q(\Omega)$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demostración. Ver [3]. □

Cuando $p = \infty$, obtenemos:

Proposición 2.1.5. *Sea $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, entonces existe una única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demostración. Ver [3]. $\square$

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ el espacio de las (clases de) funciones $u : \Omega \to K$ tales que $|u|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω unido de la siguiente noción de convergencia: Una sucesión u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ si para cada compacto K de Ω se tiene:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 2.1.1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $T_u = 0$ si, y solamente si, $u = 0$ casi siempre en Ω, donde T_u es la distribución definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demostración. Ver [4]. $\square$

De este Lema se tiene que T_u queda unívocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, esto es, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $T_u = T_v$ sí, y solamente sí, $u = v$ casi siempre en Ω.

Proposición 2.1.6. *Sea $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ en $L^p_{loc}(\Omega)$, entonces $u_\nu \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración. Ver [4]. $\square$

Lema 2.1.2. ***(Lema de J-L. Lions).*** *Sea (u_ν) una sucesión de funciones en $L^q(\Omega \times (0,T))$ con $1 < q < \infty$. Si*

i) $u_\nu \to u$ casi siempre en $\Omega \times (0,T)$,

ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

entonces, $u_\nu \rightharpoonup u$ débil en $L^q(\Omega \times (0,T))$.

Demostración. Ver [18]. $\square$

Teorema 2.1.2. ***(Teorema de Fubini).*** *Sea $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces,*

i) Para $x \in \Omega_1$, se tiene

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2), \qquad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

ii) Para $y \in \Omega_2$, se tiene

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1), \qquad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Además,

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x,y)dydx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F. \tag{2.1}$$

Demostración. Ver [17]. $\square$

2.1.2. Espacios de Sobolev

Definición 2.1.2. ***(Espacios de Sobolev)***. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ y $m \in \mathbb{N}$. Se representa por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$, tales que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertenece a $L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones.*

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ para\ 1 \leq p < \infty,$$

y

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess |D^\alpha u(x)|, \ para\ p = \infty$$

es un espacio de Banach.

Representamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ que son espacios de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso em $L^p(\Omega)$, pero no es verdad que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razón definimos el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, esto es,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se representa por $W^{-m,q}(\Omega)$ el dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se denota por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposición 2.1.7. *Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1, con frontera limitada y m un entero tal que $m \geq 1$, y $1 \leq p < \infty$. Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*
si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,
si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,
si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Ver [1]. $\square$

Teorema 2.1.3. (Teorema de Rellich-Kondrachov) - *Sea Ω un subconjunto abierto limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de clase C^1 y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*
si $p < n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, donde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,
si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,
si $p > n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,
con inmersiones compactas.

Demostración. Ver [1]. □

Proposición 2.1.8. *Sean $1 \leq q \leq p \leq \infty$ y enteros $m > n$. Entonces*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||^{1-a}_{L^q(\Omega)}||u||^a_{W^{1,m}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega),$$

donde

$$a = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m}},$$

para alguna constante $C > 0$.

Demostración. Ver [1]. □

Proposición 2.1.9. ***(Desigualdad de Poincaré)***. *Sea Ω un abierto limitado de clase C^1. Entonces, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, existe una constante positiva C, que depende sólamente de Ω y de p, tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Demostración. Ver [3]. □

Proposición 2.1.10. *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Ver [3]. □

Definición 2.1.3. *Sea V un espacio de Banach. Decimos que una sucesión (f_n) en el espacio V', converge débil* a f , si y sólo si*

$$\langle f_n, u\rangle_{V'\times V} \longrightarrow \langle f, u\rangle_{V'\times V},$$

para todo $u \in V$.

Teorema 2.1.4. ***(Alaoglu-Bourbaki)***. *Sea H un espacio de Banach. Si (f_n) es una sucesión acotada en H', entonces existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ y $u \in H'$ tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } H'.$$

Demostración. Ver [3]. □

Proposición 2.1.11. ***(Fórmula de Green)***. *Sea Ω un abierto limitado regular de $\mathbf{R}^n$. Si $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces para $1 \leq i \leq n$ tenemos que:*

$$\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = -\int \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Gamma(\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ y ν denota el vector unitario exterior a Γ.

Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$\int_\Omega \triangle u v dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} v d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Demostración. Ver [4]. □

2.2. Espacios Funcionales a Valores Vectoriales

En esta sección vamos a determinar los espacios en que se consideran las variables temporal y espacial, los cuales son necesarios para dar sentido a los problemas de evolución. Sean X un espacio de Banach y $a, b \in \mathbb{R}$.

El espacio $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste de las (clases de) funciones medibles sobre $[a, b]$ con imagen en X, o sea, las funciones $u : (a, b) \to X$, tales que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

El espacio $L^\infty(a, b; X)$ consiste de las (clases de) funciones medibles sobre $[a, b]$ con imagen en X, limitadas casi siempre en (a, b). La norma en este espacio es dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \text{ínf} \left\{ c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s. \right\}.$$

El espacio $C^m([a, b]; X)$, $m \in N$ consiste de todas las funciones continuas $u : [a, b] \to X$ que tienen derivadas continuas hasta el orden m sobre $[a, b]$.
La norma es dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Veamos algunas propiedades de estos espacios.

Proposición 2.2.1. *Sean $m = 0, 1, \ldots$; $1 \leq p < +\infty$; X y Y espacios de Banach sobre el cuerpo K, donde $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Entonces:*

i) $C^m([a, b]; X)$ *es un espacio de Banach sobre K.*

ii) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ *y* $L^\infty(a, b; X)$, *son espacios de Banach sobre K.*

iii) $C([a, b]; X)$ *es denso en* $L^p(a, b; X)$ *y la inmersión* $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$ *es continua.*

iv) Se X es un espacio de Hilbert con produto escalar $(., .)_X$, entonces $L^2(a, b; X)$ es también un espacio de Hilbert con produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

v) $L^p(a,b;X)$ es separable, si X fuera separable y $1 \leq p < +\infty$.

vi) Si $X \hookrightarrow Y$, entonces $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Demostración. Ver [18]. $\square$

Denotaremos por $D(a,b;X)$ el espacio localmente convexo completo de las funciones vectoriales $\varphi : (a,b) \mapsto X$ infinitamente diferenciables con soporte compacto en (a,b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ en $D(a,b;X)$ si:

i) $\exists\, K$ compacto de (a,b), tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ y $supp\,(\varphi)$ están contenidos en K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ en X uniformemente en $t \in (a,b)$.

Sea $v \in L^p(0,T;X)$, donde X es un espacio de Hilbert separable y $\varphi \in D(0,T)$. La integral en X

$$\int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

existe, siendo un vector de X(esta integral es entendida como una integral en X). Así, dado $v \in L^p(0,T;X)$, la aplicación

$$T_v : D(0,T) \quad \longrightarrow \quad X$$

definida por

$$\langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(s)\varphi(s)ds$$

está bien definida, es lineal y continua. Se denota por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ el espacio de las distribuciones sobre $(0,T)$ con valores en X, esto es, el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $D(0,T)$ en X. De este modo, $T_v \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ y se demuestra que T_v es unívocamente definida por v. Luego, identificando la función v con la distribución T_v se puede afirmar que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Se concluye, de este hecho que toda $v \in L^p(0,T;X)$ posee derivadas de todas las ordenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$.

Sea $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. La derivada de orden n de T es definida como siendo la distribución vectorial sobre $(0,T)$ con valores en X dada por

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

Lema 2.2.1. ***(Compacidad de Aubin-Lions).*** *Sean B_0, B y B_1espacio de Banach donde B_0, B_1 reflexivos, tales que $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ y $B_0 \hookrightarrow B$ inmersión compacta. Para $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $T < \infty$, definimos*

$$W = \{u; \quad u \in L^{p_0}(0,T;B_0),\, u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

con norma dada por

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Entonces, W es un espacio de Banach y la inmersion $W \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;B)$ es compacta.

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 2.2.1. *Sean X, Y, Z espacio de Banach tales que $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. Consideremos el conjunto*

$$W = \{u; \quad u \in L^{p_0}(0,T;X),\, u' \in L^{p_1}(0,T;Z)\}, \quad 1 \leq p_0, p_1 \leq \infty.$$

Entonces,

i) *$W \hookrightarrow C([0,T];Z)$.*

ii) *Si X, Z son reflexivos, $1 < p_0, p_1 < \infty$, se tiene que $W \overset{c}{\hookrightarrow} C([0,T];Y)$.*

Demostración. Ver [18]. □

Definición 2.2.1. *La función $u : [0,T] \longrightarrow Y$ es debilmente continua, si la función escalar $t \longrightarrow \langle u(t), Y' \rangle$ es continua en $[0,T]$ para todo $y' \in Y'$.*

Se representa por

$C_s(0,T;Y) :=$ *Espacio de la funciones $f \in L^\infty(0,T;Y)$ que son débilmente continuas de $[0,T]$ en Y.*

Teorema 2.2.2. *Sean X, Y espacio de Banach tales que $X \hookrightarrow Y$ siendo X un espacio reflexivo. Se tiene*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demostración. Ver [18]. □

2.2.1. Convergencia Débil en $L^p(0,T;V)$

Sea (u_k) una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$.

Definición 2.2.2. *Decimos que (u_k) converge débilmente para u en $L^p(0,T;V)$, el cual será denotado por $u_k \rightharpoonup u$, si*

$$\int_0^T (f(t), u_k(t))_{V' \times V} dt \longrightarrow \int_0^T (f(t), u(t))_{V' \times V} dt,$$

para todo $f \in L^q(0,T;V')$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Observación 2.2.1. *Sea* $V = H_0^1(\Omega)$. *Entonces,* $V' = H^{-1}(\Omega)$ *y*

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))dt \longrightarrow \int_0^T (w(t), u(t))dt,$$

para todo $w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Proposición 2.2.2. ***(Derivadas Generalizadas y Convergencia Débil)****. Sean* Y *y* Z *espacios de Banach con inmersión continua* $Y \hookrightarrow Z$. *Si*

$$u_k^{(n)} = v_k \quad \text{en } (0,T) \qquad \text{para todo } k \text{ y } n \geq 1 \text{ fijo}$$

y

$$\begin{aligned} &u_k^{(n)} \rightharpoonup u^{(n)} \quad \text{en } L^p(0,T;Y), \\ &v_k \rightharpoonup v \qquad \text{en } L^p(0,T;Z), \qquad 1 \leq p, q < \infty, \end{aligned}$$

entonces,

$$u^{(n)} = v \quad \text{en } (0,T).$$

Demostración. Ver [32]. □

2.2.2. Convergencia Débil* en $L^\infty(0, T; V')$

Sea (u_k) una sucesión en $L^\infty(0, T; V')$ y $u \in L^\infty(0, T; V')$.

Definición 2.2.3. *Decimos que* (u_k) *converge débil* para* u *en* $L^\infty(0, T; V')$*, el cual será denotado por* $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$*, si*

$$\int_0^T (u_k(t), w(t))_{V' \times V} dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t))_{V' \times V} dt,$$

para todo $w \in L^1(0, T; V)$.

Observación 2.2.2. $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *en* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$*, si*

$$\int_0^T (u_k(t), w(t))dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t))dt,$$

para todo $w \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Proposición 2.2.3. *Si* $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *en* $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$*, entonces* $u_k \longrightarrow u$ *en* $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Demostración. Ver [3]. □

2.3. Existencia y Prolongamiento de Soluciones

Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un subconjunto abierto cuyos elementos son denotados por (t,x) con $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función.

Definición 2.3.1. *Decimos que f satisface las condiciones de Carathéodory sobre D, si*

i) *$f(t,x)$ es medible en t, para cada x fijo.*

ii) *$f(t,x)$ es continua en x, para cada t fijo.*

iii) *Para cada compacto K en D, existe una función real e integrable $m_K(t)$, tal que*

$$\|f(t,x)\| \leq m_K(t), \quad \text{para todo}\,(t,x) \in K.$$

Teorema 2.3.1. ***(Carathéodory)**. Sean $a > 0$, $b > 0$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, donde*

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t-t_0| \leq a,\ |x-x_0| \leq b\},$$

satisface las condiciones de Carathéodory sobre D. Entonces, existe una solución de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

sobre algún intervalo $\quad |t-t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.

Demostración. Ver [7]. □

Teorema 2.3.2. ***(Prolongamiento de Solución)**. Sea $D[0,\omega) \times B$, con $0 < \omega < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < b\}$, $b > 0$ y f en las condiciones de Carathéodory. Sea $\varphi(t)$ una solución de (2.2), con $x_0 \in B$. Supongamos que en cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, donde φ está definida, se tenga que $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M una constante positiva independiente de t y $M < b$. Entonces, φ tiene un prolongamiento hasta $[0,\omega]$.*

Demostración. Ver [7, 20]. □

2.4. Desigualdades Fundamentales

Lema 2.4.1. ***(Desigualdad de Cauchy)**. Para cada $a, b, \eta > 0$ se tiene*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}.$$

Demostración. Ver [20]. □

Lema 2.4.2. ***(Desigualdad de Young generalizada)**. Sean $1 < p\,, q < \infty$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Para cada $a, b, \eta > 0$ se tiene que*

$$ab \leq \eta a^p + C(\eta) b^q,$$

donde $C(\eta) = (\eta p)^{-\frac{p}{q}} q^{-1}$.

Demostración. Ver [20]. □

Lema 2.4.3. ***(Desigualdad de Gronwall)***. *Sea $m \in L^1(0,T)$ con $m \geq 0$ casi siempre en $(0,T)$ y sea $a \geq 0$. Consideremos $\varphi \in C([0,T],\mathbb{R})$, tal que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^T m(s)\varphi(s)ds$$

para todo $t \in (0,T)$. Entonces,

$$\varphi(t) \leq a \exp(\int_0^T m(s)ds),$$

para todo $t \in (0,T)$.

Demostración. Ver [20]. □

Capítulo 3

Existencia Global de Solución

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un abierto con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular, $T > 0$ un número real y $Q = \Omega \times (0,T)$ cuya frontera lateral es dada por $\sum = \Gamma \times (0,T)$. Consideremos el siguiente problema,

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \displaystyle\int_0^T g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau - \gamma\Delta u_t = 0 & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \sum \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde

$H_1)$ $\gamma \geq 0$,

$H_2)$ ρ un número real verificando $0 < \rho < 2/(n-2)$ si $n \geq 3$ o $\rho > 0$ si $n = 1, 2$,

$H_3)$ $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$,

$H_4)$ $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función de clase C^1, limitada que satisface:

$$\begin{aligned} &A_1)\ 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0, \\ &A_2)\ g(t)e^{\alpha t}, g'(t)e^{\alpha t} \in L^1(0,\infty), \quad \text{para algún}\, \alpha > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definición 3.0.1. ***(Solución Débil)*** *Una función $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.3}$$

es llamada solución débil del problema (3.1)*, si para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ se tiene*

$$\begin{aligned} &(|u_t|^\rho u_{tt}, w) + (\nabla u, \nabla w) + (\nabla u_{tt}, \nabla w) \\ &- \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla w)d\tau + \gamma(\nabla u_t, \nabla w) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

en $D'(0,T)$ con

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.5}$$

Se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.0.1. ***(Existencia de la Solución Débil)*** *Sean $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$ y $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función de clase C^1 que satisface (A_1). Entonces, el problema* (3.1) *posee solución débil.*

Demostración. Para probar la existencia de la solución débil del problema (3.1), utilizaremos el método de Faedo-Galerkin que consiste en analizar las siguientes etapas:

(i) Aproximaciones de Galerkin, que consiste en proyectar el problema en subespacios de dimensión finita, obteniendo el problema aproximado. Este a su vez es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales, cuya existencia de solución local será garantizada por el teorema de Carathéodory.

(ii) Estimativas a priori, que consiste en hallar limitantes para la solución de la ecuación aproximada y sus derivadas. Con ello, utilizando el teorema de prolongamiento de soluciones, podemos extender la solución local para el intervalo $[0, T]$.

(iii) Pasaje al límite, que consiste en mostrar que las soluciones aproximadas convergen para la solución del problema original. Aquí, el teorema de compacidad de Aubin-Lions y el lema de Lions serán fundamentales.

(iv) Verificación de los datos iniciales, que consiste en verificar que la solución obtenida en la etapa anterior satisface los datos iniciales.

En la secuencia, C, L_1 y L_2 denotarán constantes positivas genéricas que pueden cambiar de una línea para otra.

3.1. Planteamiento del Problema Aproximado

Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar $\gamma = 1$ ya que para $\gamma = 0$ se obtienen los mismos resultados.

Sea (ω_ν) una base de $H_0^1(\Omega)$ tal que las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base sea densa en $H_0^1(\Omega)$. Esta base se puede ortonormalizar en $H_0^1(\Omega)$ mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt con norma dada en $H_0^1(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $V_m = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$ el conjunto generado por los primeros m vectores de la base (ω_ν) y definimos

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{im}(t)\omega_i, \tag{3.6}$$

donde $\gamma_{im} \in C^2([0, T])$ y $\omega_i \in V_m$ son determinados de tal forma que satisfacen el problema aproximado que plantearemos a continuación.

Sea $u_m(t)$ definida en el intervalo $[0, t_m)$, solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(|u'_m(t)|^\rho u''_m(t), \omega) + (\nabla u_m(t), \nabla\omega) + (\nabla u''_m(t), \nabla\omega)$$

$$-\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u_m(\tau), \nabla\omega)d\tau + (\nabla u'_m(t), \nabla\omega) = 0; \qquad \forall\omega \in V_m, \tag{3.7}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u'_m(0) = u_{1m}, \tag{3.8}$$

siendo u_{0m} y u_{1m} escogidos en V_m tales que

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega), \qquad u_{1m} \longrightarrow u_1 \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

En particular, existen (ξ_{im}) y (η_{im}) tales que

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^m \xi_{im}\omega_i, \qquad u_{1m} = \sum_{i=1}^m \eta_{im}\omega_i. \tag{3.10}$$

Reemplazando (3.6) en (3.7) se obtiene que

$$\sum_{i=1}^m |\gamma'_{im}(t)|^\rho \gamma''_{im}(t)(\omega_i, \omega_j) + \sum_{i=1}^m \gamma_{im}(t)(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j) + \sum_{i=1}^m \gamma''_{im}(t)(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)$$

$$-\sum_{i=1}^m (\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)\int_0^t g(t-\tau)\gamma_{im}(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^m \gamma'_{im}(t)(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j) = 0,$$

$\forall j = 1, \ldots, m$, que en su forma matricial se escribe como

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} |\gamma'_{1m}(t)|^\rho \gamma''_{1m}(t) \\ |\gamma'_{2m}(t)|^\rho \gamma''_{2m}(t) \\ \vdots \\ |\gamma'_{mm}(t)|^\rho \gamma''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \mathcal{B}\begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix} - \mathcal{B}\begin{bmatrix} \int_0^t g(t-\tau)\gamma_{1m}(\tau)d\tau \\ \int_0^t g(t-\tau)\gamma_{2m}(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-\tau)\gamma_{mm}(\tau)d\tau \end{bmatrix} + \mathcal{B}\begin{bmatrix} \gamma''_{1m}(t) \\ \gamma''_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma''_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+\mathcal{B}\begin{bmatrix} \gamma'_{1m}(t) \\ \gamma'_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma'_{mm}(t) \end{bmatrix} = 0, \tag{3.11}$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} (\omega_1, \omega_1) & \cdots & (\omega_m, \omega_1) \\ (\omega_1, \omega_2) & \cdots & (\omega_m, \omega_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\omega_1, \omega_m) & \cdots & (\omega_m, \omega_m) \end{bmatrix}; \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} (\nabla\omega_1, \nabla\omega_1) & \cdots & (\nabla\omega_m, \nabla\omega_1) \\ (\nabla\omega_1, \nabla\omega_2) & \cdots & (\nabla\omega_m, \nabla\omega_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla\omega_1, \nabla\omega_m) & \cdots & (\nabla\omega_m, \nabla\omega_m) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Denotemos

$$\mathcal{Z}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

y

$$\mathcal{G}(t) = -\begin{bmatrix} |\gamma'_{1m}(t)|^\rho \gamma''_{1m}(t) \\ |\gamma'_{2m}(t)|^\rho \gamma''_{2m}(t) \\ \vdots \\ |\gamma'_{mm}(t)|^\rho \gamma''_{mm}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Desde que (ω_ν) es una base ortonormal en $H_0^1(\Omega)$, entonces $\mathcal{B} = I$, donde I representa la matriz identidad.

Luego, en (3.11), obtenemos que

$$\mathcal{Z}''(t) + \mathcal{Z}'(t) + \mathcal{Z}(t) = \int_0^t g(t-\tau)\mathcal{Z}(\tau)d\tau + \mathcal{A}\mathcal{G}(t). \quad (3.15)$$

Definamos

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}(t) \\ \mathcal{Z}'(t) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Así, de (3.15), sigue que

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}'(t) \\ \\ \mathcal{Z}''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}'(t) \\ \\ -\mathcal{Z}'(t) - \mathcal{Z}(t) + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\mathcal{Z}(\tau)d\tau + \mathcal{A}\mathcal{G}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ \\ -Y_2(t) - Y_1(t) + \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)Y_1(\tau)d\tau + \mathcal{A}\mathcal{G}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \\ Y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)Y_1(\tau)d\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \mathcal{A}\mathcal{G}(t) \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

es decir, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$Y'(t) = \mathcal{L} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \\ Y_2(t) \end{bmatrix} + \mathcal{H}_1(t) + \mathcal{H}_2(t) = F(t, Y(t)), \tag{3.18}$$

donde

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ \mathcal{H}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)Y_1(\tau)d\tau \end{bmatrix},\ \mathcal{H}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \mathcal{A}\mathcal{G}(t) \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

De (3.6), (3.10) y por la linealidad de la base se tiene que

$$\gamma_{im}(0) = \xi_{im}, \qquad \gamma_{im}'(0) = \eta_{im}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Por lo tanto, de (3.13) y (3.16) obtenemos

$$Y(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}(0) \\ \\ \mathcal{Z}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{1m} \\ \vdots \\ \xi_{mm} \\ \eta_{1m} \\ \vdots \\ \eta_{mm} \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

De lo expuesto anteriormente, deducimos la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condición inicial:

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \tag{3.21}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ y $Y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ son datos en (3.18) y (3.20), respectivamente.

Vamos a mostrar que F satisface las condiciones del teorema de Carathéodory. Es claro que, existe una constante positiva C tal que $\|Y_0\| \leq C$.

Sea $W = [0, \infty) \times V$, donde $V = \{Y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \|Y\| \leq C\}$.

En efecto, sea $(t, Y) \in K$. Entonces,

$$\|F(t, Y)\| \leq \|\mathcal{L}\|\|Y\| + \|\mathcal{H}_1(t)\| + \|\mathcal{H}_2(t)\| \leq C\|\mathcal{L}\| + \|\mathcal{H}_1(t)\| + \|\mathcal{H}_2(t)\|.$$

Nuevamente, como $\gamma_{im} \in C^2([0, T])$ y definición de $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, se tiene que $\|\mathcal{H}_1(t)\| + \|\mathcal{H}_2(t)\|$ es integrable. Luego, si denotamos

$$f_K(t) = C\|\mathcal{L}\| + \|\mathcal{H}_1(t)\| + \|\mathcal{H}_2(t)\|,$$

se obtiene que

$$\|F(t, Y)\| \leq f_K(t), \quad \text{para todo } (t, Y) \in K.$$

Por el teorema de Carathéodory (2.3.1), el problema aproximado (3.7)-(3.8) posee solución local $u_m(t)$ en un intervalo $[0, t_m)$, $t_m < T$.

Observación 3.1.1. *De H_2), para $n \geq 3$, por el teorema de Rellich-Kondrachov se tiene que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$.*

Observación 3.1.2. *Desde que $\dfrac{\rho}{2(\rho+1)} + \dfrac{1}{2(\rho+1)} + \dfrac{1}{2} = 1$, de la observación anterior y la desigualdad generalizada de Hölder, se obtiene que*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u'_m|^\rho u''_m \omega dx &\leq \||u'_m|^\rho\|_{L^{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}(\Omega)} \|u''_m\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u'_m\|_{H_0^1(\Omega)} \|u''_m\|_{H_0^1(\Omega)} \|\omega\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_\Omega |u'_m|^\rho u''_m \omega dx$ tiene sentido.

3.2. Estimativas a Priori

3.2.1. Primera Estimativa

Desde que

$$\int_\Omega |u_m'(t)|^\rho u_m''(t) u_m'(t) dx = \int_\Omega |u_m'(t)|^{\rho+1} \frac{d}{dt}|u_m'(t)| dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_m'(t)|^{\rho+2} dx$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho+2}\left\|u_m'(t)\right\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}, \tag{3.22}$$

$$\int_\Omega \nabla u_m(t) \nabla u_m'(t) dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.23}$$

y

$$\int_\Omega \nabla u_m''(t) \nabla u_m'(t) dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m'(t)|^2 dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.24}$$

tomando $\omega = u_m'(t)$ en (3.7), utilizando las identidades (3.22)-(3.24) y la desigualdad de Hölder, deducimos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\rho+2}\left\|u_m'(t)\right\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + \left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u_m(\tau), \nabla u_m'(t)) d\tau$$

$$\leq \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} \int_0^t g(t-\tau)\|\nabla u_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau. \tag{3.25}$$

Ahora, por la desigualdad de Young y el teorema de Fubini obtenemos la siguiente estimativa:

$$\|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} \int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla u_m(\tau)\right\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

$$\leq \eta \left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla u_m(\tau)\right\|_{L^2(\Omega)} d\tau\right)^2$$

$$= \eta \left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-\tau) d\tau \int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla u_m(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau\right)$$

$$\leq \eta \left\|\nabla u_m'(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g(t-\tau)\left\|\nabla u_m(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau, \tag{3.26}$$

donde η es un número positivo arbitrario.

De (3.25) y (3.26) resulta

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\rho+2}\|u'_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}+(1-\eta)\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{1}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau. \tag{3.27}$$

Integrando de 0 hasta t, de la desigualdad anterior y de (3.8) se obtiene,

$$\frac{1}{\rho+2}\|u'_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+(1-\eta)\int_0^t\|\nabla u'_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq \frac{1}{\rho+2}\|u_{1m}\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\|\nabla u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^t g(s-\tau)\|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau ds$$

$$\leq C\left(\|u_{1m}\|^2_{H^1_0(\Omega)}+\|u_{0m}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)+\frac{1}{4\eta}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau$$

$$\leq C+\frac{1}{4\eta}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau, \tag{3.28}$$

(recordemos que $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ y $u_{0m},u_{1m}\in H^1_0(\Omega)$ son limitadas).

De la desigualdad anterior, se tiene que

$$\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C+\frac{1}{2\eta}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau.$$

Luego, por la desigualdad de Gronwall obtenemos la siguiente estimativa:

$$\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C \qquad \text{para todo } t\in[0,t_m). \tag{3.29}$$

Así , de (3.28) y (3.29), tomando $\eta=1/4$, obtenemos una constante positiva L_1, independiente de m y t, tal que

$$\|u'_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|\nabla u'_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds\leq L_1, \tag{3.30}$$

para todo $t\in[0,t_m)$. Por el teorema de prolongamiento de solución (2.3.2) , podemos extender la solución aproximada $u_m(t)$ para el intervalo $[0,T]$.

3.2.2. Segunda Estimativa

Análogo a lo hecho anteriormente, considerando $\omega = u''_m$ en (3.7), se obtiene que

$$\int_\Omega |u'_m(t)|^\rho |u''_m(t)|^2 dx + \|\nabla u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= -\int_\Omega \nabla u_m(t)\nabla u''_m(t)dx + \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u_m(\tau), \nabla u''_m(t))d\tau$$

$$\leq \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u''_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u''_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla u_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

$$\leq 2\eta \|\nabla u''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \frac{1}{4\eta}\|\nabla u_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{3.31}$$

donde $\eta > 0$ es un número arbitrario.

Integrando de 0 hasta t la desigualdad anterior y por la estimativa (3.30) sigue que

$$\int_0^t \int_\Omega |u'_m(s)|^\rho |u''_m(s)|^2 dxds + (1-2\eta)\int_0^t \|\nabla u''_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{1}{2}\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\eta}\int_0^t \|\nabla u_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{1}{4\eta}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|\nabla u_m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau$$

$$\leq C + \frac{T}{4\eta}L_1 + \frac{1}{4\eta}\|g\|^2_{L^1(0,\infty)} T L_1. \tag{3.32}$$

Eligiendo $\eta = 1/4$, de (3.32) se obtiene la siguiente estimativa:

$$\|\nabla u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u''_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq L_2, \tag{3.33}$$

para todo $t \in [0, T]$, donde L_2 es una constante positiva, independiente de m y t.

3.3. Pasaje al Límite

De (3.30) y (3.33), tenemos que

$$u_m \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{3.34}$$

$$u'_m \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{3.35}$$

$$u_m' \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)), \tag{3.36}$$

$$u_m' \text{ es limitada en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.37}$$

$$u_m'' \text{ es limitada en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.38}$$

De (3.34), (3.37) y (3.38), existe una subsecuencia (u_μ) de (u_m) tal que

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.39}$$

$$u_\mu' \rightharpoonup v \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.40}$$

y

$$u_\mu'' \rightharpoonup w \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.41}$$

respectivamente. Luego, de la proposición 2.2.2, obtenemos $v = u'$ y $w = v' = u''$.

De la inmersión $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, de (3.34), (3.35) y la unicidad del límite débil sigue que

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ débil estrella en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.42}$$

$$u_\mu' \rightharpoonup u' \text{ débil estrella en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.43}$$

Además,

$$u_\mu'' \rightharpoonup u'' \text{ débil en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.44}$$

Análisis del término no lineal.

Siendo $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, utilizando la estimativa (3.30) se tiene que

$$\left\||u_\mu'|^\rho u_\mu'\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T \left\||u_\mu'(s)|^\rho u_\mu'(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds = \int_0^T \left\|u_\mu'(s)\right\|^{2(\rho+1)}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)} ds$$

$$\leq C\int_0^T \left\|u_\mu'(s)\right\|^{2(\rho+1)}_{H_0^1(\Omega)} ds = C\int_0^T \left\|\nabla u_\mu'(s)\right\|^{2(\rho+1)}_{L^2(\Omega)} ds \leq CTL_1^{\rho+1}. \tag{3.45}$$

Sea

$$W = \{v; \quad v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad \frac{dv}{dt} = v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}.$$

Desde que la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacta, por el teorema de Aubin-Lions, se tiene que $W \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ con inmersión compacta.

De (3.37) y (3.38) deducimos que u'_μ es limitado en W. Así, por la inmersión compacta y la unicidad de la convergencia débil estrella, existe una subsecuencia de u'_μ, que será representada por la misma notación, tal que

$$u'_\mu \longrightarrow u' \ \text{ fuerte en } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.46}$$

y, por consiguiente,

$$|u'_\mu|^\rho u'_\mu \longrightarrow |u'|^\rho u' \quad \text{casi siempre en } \ \Omega \times (0,T). \tag{3.47}$$

De (3.45) y (3.47), por el lema de Lions, concluímos que

$$|u'_\mu|^\rho u'_\mu \rightharpoonup |u'|^\rho u' \ \text{ débil en } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.48}$$

u es candidato a solución débil.

En efecto, sea $\theta \in D(0,T)$ y $\omega \in V_m$. De (3.48) y (3.39)-(3.44), deducimos las siguientes convergencias:

$$\int_0^T (|u'_\mu(t)|^\rho u'_\mu(t), \omega)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (|u'(t)|^\rho u'(t), \omega)\theta'(t)dt, \tag{3.49}$$

$$\int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla\omega)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla\omega)\theta(t)dt, \tag{3.50}$$

$$\int_0^T (\nabla u'_\mu(t), \nabla\omega)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u'(t), \nabla\omega)\theta(t)dt, \tag{3.51}$$

$$\int_0^T (\nabla u''_\mu(t), \nabla\omega)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u''(t), \nabla\omega)\theta(t)dt. \tag{3.52}$$

Desde que

$$\begin{aligned}
\int_0^T (|u'_\mu(t)|^\rho u''_\mu(t), \omega)\theta(t)dt &= \int_\Omega \left(\int_0^T |u'_\mu(t)|^\rho u''_\mu(t)\theta(t)dt \right) \omega dx \\
&= -\frac{1}{\rho+1} \int_\Omega \left(\int_0^T |u'_\mu(t)|^\rho u'_\mu(t)\theta'(t)dt \right) \omega dx \\
&= -\frac{1}{\rho+1} \int_0^T (|u'_\mu(t)|^\rho u'_\mu(t), \omega)\theta'(t)dt, \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

multiplicando (3.7) por θ, integrando de 0 hasta T y utilizando la identidad anterior obtenemos

$$
-\frac{1}{\rho+1}\int_0^T (|u'_\mu(t)|^\rho u'_\mu(t),\omega)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t),\nabla\omega)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u''_\mu(t),\nabla\omega)\theta(t)dt
$$

$$
-\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u_\mu(\tau),\nabla\omega)\theta(t)d\tau dt + \int_0^T (\nabla u'_\mu(t),\nabla\omega)\theta(t)dt = 0;\ \forall\omega\in V_m. \tag{3.54}
$$

Por lo tanto, de las convergencias (3.49)-(3.52) se obtiene en (3.54) la siguiente identidad:

$$
-\frac{1}{\rho+1}\int_0^T (|u'(t)|^\rho u'(t),\omega)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla\omega)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u''(t),\nabla\omega)\theta(t)dt
$$

$$
-\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)\theta(t)d\tau dt + \int_0^T (\nabla u'(t),\nabla\omega)\theta(t)dt = 0;\ \forall\omega\in V_m. \tag{3.55}
$$

Debido a la densidad de las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base (ω_m) en $H_0^1(\Omega)$, de (3.55), sigue que

$$
-\frac{1}{\rho+1}\int_0^T (|u'(t)|^\rho u'(t),\omega)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla\omega)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u''(t),\nabla\omega)\theta(t)dt
$$

$$
-\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)\theta(t)d\tau dt + \int_0^T (\nabla u'(t),\nabla\omega)\theta(t)dt = 0; \tag{3.56}
$$

para todo $\omega\in H_0^1(\Omega)$.

De (3.53), se tiene que

$$
-\frac{1}{\rho+1}\int_0^T (|u'(t)|^\rho u'(t),\omega)\theta'(t)dt = \int_0^T (|u'(t)|^\rho u''(t),\omega)\theta(t)dt = \langle (|u'|^\rho u'',\omega);\theta\rangle .
$$

Así, reemplazando la identidad arriba en (3.56), resulta

$$
\langle (|u'|^\rho u'',\omega);\theta\rangle + \langle (\nabla u(t),\nabla\omega);\theta\rangle + \langle (\nabla u''(t),\nabla\omega);\theta\rangle
$$

$$
+\left\langle \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau;\theta\right\rangle + \langle (\nabla u'(t),\nabla\omega);\theta\rangle = 0, \tag{3.57}
$$

para todo $\theta\in D(0,T)$ y para todo $\omega\in H_0^1(\Omega)$.

3.4. Condiciones Iniciales

Debido a las convergencias (3.42), (3.43) y (3.44), sigue del Teorema 2.2.2 que

$$u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C_s\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$$
$$u_t \in C\left([0,T]; H^{-1}(\Omega)\right) \cap C_s\left([0,T]; L^2(\Omega)\right),$$

donde $C_s(0,T;X)$ representa el espacio de las funciones debilmente continuas de $[0,T]$ en X .
De esta forma, $u(0)$ y $u_t(0)$ tienen sentido.

Probaremos inicialmente que

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3.58}$$

En efecto, sea $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0)=1$ y $\theta(T)=0$. De (3.51) se tiene la siguiente convergencia:

$$\int_0^T \left(\nabla u'_\mu(t), \nabla\omega\right)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \left(\nabla u'(t), \nabla\omega\right)\theta(t)dt. \tag{3.59}$$

Integrando por partes (3.59) tenemos

$$-\left(\nabla u_\mu(0), \nabla\omega\right) - \int_0^T \left(\nabla u_\mu(t), \nabla\omega\right)\theta'(t)dt \to -\left(\nabla u(0), \nabla\omega\right)$$
$$- \int_0^T \left(\nabla u(t), \nabla\omega\right)\theta'(t)dt. \tag{3.60}$$

De (3.50), se tiene que

$$\int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla\omega)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla\omega)\theta'(t)dt. \tag{3.61}$$

Entonces, de (3.60) y (3.61) obtenemos

$$\left(\nabla u_\mu(0), \nabla\omega\right) \longrightarrow \left(\nabla u(0), \nabla\omega\right),$$

es decir,

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u(0) \quad \text{débil en } \; H_0^1(\Omega). \tag{3.62}$$

Entretanto, de (3.9) se tiene que

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u_0 \quad \text{débil en } H_0^1(\Omega),. \tag{3.63}$$

Luego, por la unicidad de la convergencia débil, se tiene que

$$u(0) = u_0. \tag{3.64}$$

Probaremos a seguir que

$$u'(0) = u_1. \tag{3.65}$$

Sea $0 < \delta < T$ y consideremos la función $\theta_\delta \in H^1(0,T)$ definida por

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{\delta} + 1; & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \delta, \\ \\ 0; & \text{si} \quad \delta < t \leq T. \end{cases}$$

Multiplicando a la ecuacion aproximada (3.7) por θ_δ e integrando de 0 hasta T, se tiene que

$$\int_0^T (|u'_\mu(t)|^\rho u''_\mu(t), \omega)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla\omega)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (u''_\mu(t), \omega)_{H_0^1(\Omega)}\theta_\delta(t)dt$$

$$- \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u_\mu(\tau), \nabla\omega)\theta_\delta(t)d\tau dt + \int_0^T (\nabla u'_\mu(t), \nabla\omega)\theta_\delta(t)dt = 0; \ \forall\omega \in V_m. \tag{3.66}$$

Integrando la expresión arriba por partes, obtenemos

$$\int_0^\delta (|u'_\mu(t)|^\rho u''_\mu(t), \omega)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (\nabla u_\mu(t), \nabla\omega)\theta_\delta(t)dt - (u'_\mu(0), \omega)_{H_0^1(\Omega)}$$

$$- \int_0^\delta (u'_\mu(t), \omega)_{H_0^1(\Omega)}\theta'_\delta(t)dt - \int_0^\delta \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u_\mu(\tau), \nabla\omega)\theta_\delta(t)d\tau dt$$

$$+ \int_0^\delta (\nabla u'_\mu(t), \nabla\omega)\theta_\delta(t)dt = 0; \ \forall\omega \in V_m. \tag{3.67}$$

Tomando $\mu \longrightarrow \infty$, de (3.5) y llevando en consideración la densidad de los elementos de la base (ω_m) en $H_0^1(\Omega)$, de la identidad anterior resulta

$$\int_0^\delta (|u'(t)|^\rho u''(t), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (\nabla u(t), \nabla v)\theta_\delta(t)dt - (u_1, v)_{H_0^1(\Omega)}$$

$$+ \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u'(t), v)_{H_0^1(\Omega)}dt - \int_0^\delta \int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla v)\theta_\delta(t)d\tau dt$$

$$+ \int_0^\delta (\nabla u'(t), \nabla v)\theta_\delta(t)dt = 0, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.68}$$

Finalmente, pasando al límite $\delta \longrightarrow 0$, de lo anterior deducimos que

$$(u_1, v)_{H_0^1(\Omega)} = (u_t(0), v), \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, obtenemos (3.65).

De lo expuesto anteriormente, demostramos el Teorema 3.0.1. □

□

Capítulo 4

Comportamiento Asintótico

En este capítulo estudiaremos el comportamiendo asintótico de las soluciones de (3.1) obtenidas en el Teorema 3.0.1 (con $\gamma = 1$).

Definamos la energía asociada al sistema (3.1) como

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \tag{4.1}$$

Se obtiene que,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx - \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \tag{4.2}$$

En efecto, multiplicando por u_t a la ecuación (3.1) e integrando en Ω, se tiene que

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx - \int_\Omega \Delta u_{tt}u_t dx + \int_\Omega \int_0^T g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau u_t dx$$

$$- \int_\Omega \Delta u_t u_t dx = 0. \tag{4.3}$$

Desde que $u, u_t, u_{tt} \in H_0^1(\Omega)$, se obtienen las siguientes identidades.

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt}u_t dx = \int_\Omega |u_t|^{\rho+1}\frac{d}{dt}|u_t|dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx, \tag{4.4}$$

$$-\int_\Omega \Delta u u_t dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{4.5}$$

$$-\int_\Omega \Delta u_{tt} u_t dx = \int_\Omega \nabla u_{tt} \nabla u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \tag{4.6}$$

Luego, reemplazando (4.4)-(4.6) en (4.3) se obtiene (4.2).

Notamos que la derivada de la energía no tiene un signo definido, por tanto la disipación no es clara. Probaremos a continuación que la energía es uniformemente limitada.

Proposición 4.0.1. *Supongamos que g satisface (A_1) y (A_2). Entonces, existe una constante positiva C, tal que*

$$E(t) \leq CE(0) \quad \textit{para todo } t \geq 0. \tag{4.7}$$

Demostración. Introducimos el funcional

$$\Phi_1(t) := \int_\Omega \int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx =: (\tilde{G_\alpha} \Box \nabla u)(t), \tag{4.8}$$

donde

$$\tilde{G_\alpha}(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} e^{\alpha s} |g'(s)| ds \text{ , para algún } \alpha > 0.$$

Como

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{G_\alpha}(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2\right) = \left(-\alpha \tilde{G_\alpha}(t-s) + |g'(t-s)|\right) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2$$

$$+ 2\tilde{G_\alpha}(t-s)\nabla u(t)(\nabla u(t) - \nabla u(s)), \tag{4.9}$$

derivando $\Phi_1(t)$ con respecto a t se obtiene que

$$\Phi_1'(t) = -\alpha \Phi_1(t) - \int_\Omega \int_0^t |g'(t-s)||\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx$$

$$+ 2 \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s) \left(\nabla u(t) - \nabla u(s)\right) ds dx. \tag{4.10}$$

Utilizando la desigualdad de Young y la desigualdad de Hölder, se obtiene la siguiente estimativa:

$$\int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s) \left(\nabla u(t) - \nabla u(s)\right) dsdx \leq \delta_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx$$

$$+ \frac{1}{4\delta_1} \int_\Omega \left(\int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s) \left(\triangledown u(t) - \triangledown u(s)\right) ds \right)^2 dx$$

$$= \delta_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{4\delta_1} \int_\Omega \left(\int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s)^{1/2} \tilde{G_\alpha}(t-s)^{1/2} \left(\triangledown u(t) - \triangledown u(s)\right) ds \right)^2 dx$$

$$\leq \delta_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{4\delta_1} \int_\Omega \int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s) ds \int_0^t \tilde{G_\alpha}(t-s) |\triangledown u(t) - \triangledown u(s)|^2 dsdx$$

$$= \delta_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{4\delta_1} \int_0^t \tilde{G_\alpha}(s) ds (\tilde{G_\alpha} \Box \triangledown u)(t), \tag{4.11}$$

donde $\delta_1 > 0$ es un número arbitrario.

Por lo tanto, de (4.10) y (4.11) sigue que

$$\Phi_1'(t) \leq -\alpha \Phi_1(t) - (|g'| \Box \triangledown u)(t) + \delta_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2\delta_1} \int_0^t \tilde{G_\alpha}(s) ds (\tilde{G_\alpha} \Box \triangledown u)(t). \tag{4.12}$$

De la definición de $\tilde{G_\alpha}(t)$ se tiene que

$$\int_0^t \tilde{G_\alpha}(s) ds = \int_0^t e^{-\alpha s} \int_s^\infty e^{\alpha \mu} |g'(\mu)| d\mu ds$$

$$\leq \int_0^t e^{-\alpha s} \int_0^\infty e^{\alpha \mu} |g'(\mu)| d\mu ds = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \int_0^\infty e^{\alpha s} |g'(s)| ds$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{\alpha s} |g'(s)| ds =: \frac{\overline{g}'_\alpha}{\alpha}.$$

Luego, en (4.12) obtenemos

$$\Phi_1'(t) \leq -\left[\alpha - \frac{\overline{g}'_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right] \Phi_1(t) - (|g'| \Box \triangledown u)(t) + 2\delta_1 \int_\Omega |\triangledown u_t|^2 dx. \tag{4.13}$$

Por otro lado, tenemos la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2}\left(g'\Box\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g\Box\nabla u\right)'(t)+\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right\}-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx$$

$$=\int_\Omega\nabla u_t\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx. \tag{4.14}$$

En efecto,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^t g'(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2dsdx-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2dsdx$$

$$+\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right\}-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^t g'(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2dsdx-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^t g'(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2dsdx$$

$$-\frac{2}{2}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)\nabla u_t dsdx+\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx$$

$$+\frac{2}{2}\int_0^t g(s)ds\int_\Omega(\nabla u)(\nabla u_t)dx-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx$$

$$=\int_\Omega\nabla u_t\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx.$$

Definamos,

$$\mathcal{E}(t):=\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega|u_t|^{\rho+2}dx+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_t|^2dx$$

$$+\frac{1}{2}\left(g\Box\nabla u\right)(t). \tag{4.15}$$

De la hipotesis (A_1), se tiene que

$$\mathcal{E}(t)\geq\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega|u_t|^{\rho+2}dx+\frac{l}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_t|^2dx,$$

y, por lo tanto,

$$E(t)\leq C\mathcal{E}(t), \tag{4.16}$$

para todo $t \geq 0$, con $C = \dfrac{1+2l}{l} > 0$. Derivando (4.15) respecto a t, utilizando las identidades (4.2) y (4.14), sigue que

$$\mathcal{E}'(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx - \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$$+ \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\left(g\Box\nabla u\right)'(t)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}E(t) - \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx\right) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(g'\Box\nabla u)(t)$$

$$= -\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(g'\Box\nabla u)(t). \tag{4.17}$$

Definamos

$$e(t) := \mathcal{E}(t) + \lambda\Phi_1(t), \quad \text{para algún } \lambda \geq \frac{1}{2}. \tag{4.18}$$

Es claro que $E(t) \leq Ce(t)$ y $E(0) = e(0)$. Derivando (4.18), utilizando la identidad (4.13) y la desigualdad (4.17), deducimos que

$$e'(t) \leq -\lambda\left[\alpha - \frac{\bar{g}'_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right]\Phi_1(t) - \lambda(|g'|\Box\nabla u)(t) + 2\delta_1\lambda\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2}(g'\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$$= -(1-2\delta_1\lambda)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - (\lambda - \frac{1}{2})(|g'|\Box\nabla u)(t) - \lambda\left[\alpha - \frac{\bar{g}'_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right]\Phi_1(t)$$

$$- \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{4.19}$$

Escogiendo $\delta_1 = \dfrac{1}{4\lambda}$ y $\bar{g}'_\alpha < \dfrac{\alpha^2}{2\lambda}$, se tiene en la desigualdad anterior que

$$e'(t) \leq -(1-\frac{2\lambda}{4\lambda})\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - (\lambda - \frac{1}{2})(|g'|\Box\nabla u)(t) - \lambda\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2\alpha}\frac{4\lambda}{2\lambda}\right)\Phi_1(t)$$

$$-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - (\lambda - \frac{1}{2})(|g'|\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 0, \tag{4.20}$$

para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, de (4.20) se tiene

$$E(t) \leq Ce(t) \leq Ce(0) = CE(0), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

para alguna constante positiva C. $\Box$

Observación 4.0.1. *Sea $u_t \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, existe una constante positiva C tal que*

$$\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)} \leq C\int_\Omega |\nabla u_t|^2. \tag{4.21}$$

En efecto, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, se obtiene

$$\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u_t|^2\right)^{\rho+1} = C\left(\int_\Omega |\nabla u_t|^2\right)^{\rho}\int_\Omega |\nabla u_t|^2. \tag{4.22}$$

De la Proposición 4.0.1, sigue que

$$\int_\Omega |\nabla u_t|^2 \leq 2Ce(t) \leq 2Ce(0).$$

Luego, en (4.22), tenemos

$$\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)} \leq C(2Ce(0))^\rho \int_\Omega |\nabla u_t|^2.$$

Observación 4.0.2. *Es claro que*

$$0 \leq \int_0^t g(s)ds \leq 1 - l < 1. \tag{4.23}$$

En la secuencia, deduciremos algunas estimativas que serán de gran utilidad para nuestros teoremas principales. Se obtienen los siguientes resultados.

Lema 4.0.1. *Para todo δ_i, $i = 2,3,4,5$, existe una constante positiva C, tal que se obtienen las siguientes estimativas:*

$$i)(g\Box\nabla u)(t) \leq 2\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx + 2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx, \tag{4.24}$$

$$ii) \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx \leq C\delta_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{4\delta_2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx, \tag{4.25}$$

$$iii) \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx \leq \delta_3 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$+ \left(\delta_4 + \frac{1}{4\delta_3}\right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{4\delta_4}\int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx, \tag{4.26}$$

$$iv) \int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) ds dx \leq C\left(\delta_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right)$$

$$C\delta_5 \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx + \frac{1}{4\delta_5}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \tag{4.27}$$

Demostración. **(i)** De (4.23), se tiene que

$$(g\Box\nabla u)(t) = \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx$$

$$\leq 2\int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx + 2\int_0^t g(t-s) ds \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$\leq 2\int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx + 2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx,$$

obteniendo (4.24).

(ii) Por otro lado, de (4.21) existe $C > 0$, tal que

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx \leq \delta_2 \int_\Omega |u|^2 dx + \frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)} dx \leq C\delta_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{C}{4\delta_2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx,$$

con lo cual se tiene (4.25).

(iii) Para demostrar (4.26), vamos a proceder como lo hecho anteriormente, obteniendo

$$\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx \le \int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega |\nabla u_t(t)||\nabla u(t)|dx$$

$$+\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u_t(t)||\nabla u(s)|dxds \le \left(\delta_3\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1}{4\delta_3}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx\right)$$

$$+\delta_4\int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{1}{4\delta_4}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx$$

$$\le \delta_3\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx+\left(\delta_4+\frac{1}{4\delta_3}\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{1}{4\delta_4}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx.$$

(iv) Nuevamente, de (4.21) y utilizando (4.25), deducimos que

$$\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \le \int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx$$

$$+\int_\Omega |u_t(t)|^{\rho+1}\int_0^t g(t-s)|u(s)|dsdx \le C\left(\delta_2\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx\right)$$

$$+\frac{1}{4\delta_5}\int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)}dx+\delta_5\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|u(s)|dsdx$$

$$\le C\left(\delta_2\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx\right)+\frac{1}{4\delta_5}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+C\delta_5\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\mathbf{\nabla} u(s)|dsdx$$

$\square$

Lema 4.0.2. *Para todo δ_i, $i=6,7$, existe una constante positiva C, tal que*

$$\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx \le \delta_6\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{1}{4\delta_6}(g\Box\nabla u)(t), \quad (4.28)$$

$$\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \le C\delta_7\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{C}{4\delta_7}(g\Box\nabla u)(t). \quad (4.29)$$

Demostración. Análogamente a lo hecho en el lema anterior, se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx \leq \delta_6 \int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx$$

$$+\frac{1}{4\delta_6}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2dsdx \leq \delta_6\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{1}{4\delta_6}(g\Box\nabla u)(t)$$

resultando (4.28).

Además, de (4.21), se tiene que

$$\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \leq \delta_7 \int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)}dx$$

$$+\frac{1}{4\delta_7}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|u(t)-u(s)|dsdx \leq C\delta_7\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx$$

$$+\frac{C}{4\delta_7}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|dsdx \leq C\delta_7\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{C}{4\delta_7}(g\Box\nabla u)(t),$$

con lo cual se obtiene (4.29). □

Ahora, introducimos los siguientes funcionales:

$$\psi(t) := \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx+\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx, \tag{4.30}$$

$$\chi(t) := \int_\Omega (\triangle u_t-\frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1})\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx, \tag{4.31}$$

$$\Phi_2(t) := \int_\Omega\int_0^t G_\alpha(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx \geq 0, \tag{4.32}$$

donde

$$G_\alpha(t) := e^{-\alpha t}\int_t^{+\infty} e^{\alpha s}g(s)ds.$$

Se obtienen el siguiente resultado.

Proposición 4.0.2. *Existe una constante positiva C, tal que*

$$\psi(t) \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx\right) \tag{4.33}$$

y

$$\chi(t) \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|dsdx\right). \tag{4.34}$$

Demostración. De (4.25) del lema 4.0.1 se tiene que

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right) \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right).$$

Ahora, utilizando las estimativas (4.26) y (4.27) del lema 4.0.1, obtenemos

$$\chi(t) = -\int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds dx$$

$$-\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s)) ds dx$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)| ds dx\right),$$

donde en ambos casos hemos particularizado los δ_i, $i = 2, 3, 4, 5$ del lema 4.0.1. $\square$

Definamos ahora el siguiente funcional

$$V(t) := e(t) + \eta\Phi_2(t) + \varepsilon(\psi(t) + \chi(t)) = \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}(g\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \lambda\Phi_1(t) + \eta\Phi_2(t) + \varepsilon(\psi(t) + \chi(t)), \tag{4.35}$$

para alguna constante positiva ε y $\eta > 0$ a ser determinado más adelante.

Obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.0.1. *Bajo las afirmaciones (A_1) y (A_2), existe una constante $C > 0$, tal que*

$$V(t) \leq C\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right.$$

$$\left. + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx\right), \tag{4.36}$$

para todo $t \geq 0$ y $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Demostración. De (4.35) y de la estimativa (4.24) del lema 4.0.1 se tiene, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, que

$$V(t) \leq C\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right) + \frac{1}{2}(g\Box\nabla u)(t)$$

$$+ \varepsilon_0\psi(t) + \varepsilon_0\chi(t)$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right)$$

$$+ \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx + \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \varepsilon_0\psi(t) + \varepsilon_0\chi(t), \tag{4.37}$$

para todo $t \geq 0$.

Por otra parte, de la proposición 4.0.2, obtenemos

$$\varepsilon_0\chi(t) + \varepsilon_0\psi(t) \leq \varepsilon_0 C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)| ds dx\right)$$

$$+ \varepsilon_0 C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right)$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)| ds dx\right). \tag{4.38}$$

Así, de (4.37) y (4.38) sigue (4.36). □

Teorema 4.0.2. *Bajo las afirmaciones (A_1) y (A_2), existe una constante $m > 0$, tal que*

$$mE(t) \leq V(t), \tag{4.39}$$

para todo $t \geq 0$ y $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Demostración. Desde que $\Phi_1(t), \Phi_2(t) \geq 0$ y $1 - \int_0^t g(s)ds \geq l$, entonces de (4.35) se tiene que

$$V(t) \geq \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx + \frac{l}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + \frac{1}{2}(g\Box\nabla u)(t)$$

$$+\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx - \varepsilon\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx$$

$$+\varepsilon\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx - \frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \tag{4.40}$$

De (4.25), (4.28) y (4.29) se obtiene una constante positiva C, tal que

$$\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx \geq -\frac{\varepsilon C}{\rho+1}\left(\delta_2\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx\right), \tag{4.41}$$

$$-\varepsilon\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx$$

$$\geq -\varepsilon\left(\delta_6\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + \frac{1}{4\delta_6}(g\Box\nabla u)(t)\right), \tag{4.42}$$

$$-\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t)\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$\geq -\frac{\varepsilon C}{\rho+1}\left(\delta_7\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + \frac{1}{4\delta_7}(g\Box\nabla u)(t)\right), \tag{4.43}$$

respectivamente, para todo $\delta_i > 0$, $i = 2, 6, 7$.

Además, para todo $\delta_3 > 0$, sigue la siguiente estimativa:

$$\varepsilon\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx \geq -\varepsilon\left(\delta_3\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \frac{1}{4\delta_3}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx\right). \tag{4.44}$$

Luego, de (4.41)- (4.44) en (4.40), se tiene, para todo $\delta_i > 0$, $i = 2, 3, 6, 7$, la siguiente desigualdad:

$$V(t) \geq m_1\int_\Omega |\nabla u|^2dx + m_2\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + m_3(g\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx, \tag{4.45}$$

donde,

$$m_1 = \left(\frac{l}{2} - \frac{C\varepsilon\delta_2}{\rho+1} - \varepsilon\delta_3\right),$$

$$m_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{C\varepsilon}{4\delta_2(\rho+1)} - \varepsilon\delta_6 - \frac{C\varepsilon\delta_7}{\rho+1} - \frac{\varepsilon}{4\delta_3}\right),$$

$$m_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{C\varepsilon}{4\delta_7(\rho+1)} - \frac{\varepsilon}{4\delta_6}\right).$$

Finalmente, escogiendo $\delta_i > 0$, $i = 2, 3, 6, 7$ adecuados y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que $m_1, m_2, m_3 > 0$, de (4.45), obtenemos que

$$V(t) \geq mE(t),$$

con $\quad m = \dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2 + 2m_1m_2} > 0.$

□

4.1. Decaimiento Uniforme de la Energía

En esta sección, estudiaremos el comportamiento asintótico de la energía asociada al sistema (3.1). Para ello, comenzamos con una definición.

Definición 4.1.1. *Sea $E(t)$ la energía asociada al sistema* (3.1) *dada en* (4.1). *Decimos que $E(t)$* ***decae exponencialmente para cero****, si existen dos constantes positivas C y μ, tales que*

$$E(t) \leq Ce^{-\mu t}, \tag{4.46}$$

para todo $t \geq 0$.

Observación 4.1.1. *De la hipótesis (A_2) se tiene que*

$$\int_0^t |g'(s)|ds \leq \|g'(\cdot)e^{\alpha\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}. \tag{4.47}$$

Observación 4.1.2. *Es claro que*

$$\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx \leq C\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)}dx \leq C\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \tag{4.48}$$

Con la finalidad de obtener el decaimiento de la energía, vamos a mostrar algunas estimativas de suma importancia.

Lema 4.1.1. *Se obtienen las siguientes estimativas:*

$$i) \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds \right|^2 dx \leq \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx, \tag{4.49}$$

$$ii) \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx, \tag{4.50}$$

$$iii) \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx. \tag{4.51}$$

Demostración. **(i)** De (4.23) y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds \right|^2 dx = \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)^{1/2} g(t-s)^{1/2}\nabla u(s)ds \right|^2 dx$$

$$\leq \int_0^t g(t-s)ds \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx \leq \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx.$$

(ii) De la desigualdad anterior, se tiene

$$\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds \right|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx.$$

(iii) De manera análoga a lo hecho en la desigualdad anterior, se obtiene (4.51). □

Lema 4.1.2. *Existe una constante positiva C, tal que*

$$i) \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{\|g'(\cdot)e^{\alpha\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}}{2}(|g'|\Box\nabla u)(t), \tag{4.52}$$

$$ii) \int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s))dsdx$$

$$\leq \frac{C}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{\|g'(\cdot)e^{\alpha\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}}{2}(|g'|\Box\nabla u)(t). \tag{4.53}$$

Demostración. Análogamente a lo hecho en la primera parte del lema anterior y utilizando (4.47), obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\int_0^t g'(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|ds\right|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t |g\prime(t-s)|ds \int_\Omega \int_0^t |g'(t-s)||\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dsdx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{\|g'(\cdot)e^{\alpha\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}}{2}(|g'|\Box\nabla u)(t).$$

Por otra parte, de (4.21), existe una constante $C > 0$, tal que

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s))dsdx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)} dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\int_0^t g'(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|ds\right|^2 dx$$

$$\leq \frac{C}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{\|g'(\cdot)e^{\alpha\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}}{2}(|g'|\Box\nabla u)(t).$$

□

Lema 4.1.3. *Se tienen las siguientes identidades:*

$$\Phi_2'(t) = -\alpha\Phi_2(t) - \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx + \bar{g}_\alpha \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx, \tag{4.54}$$

$$\psi'(t) = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx$$

$$+\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |\nabla u_t|^{\rho+2} dx, \tag{4.55}$$

donde $\quad \bar{g}_\alpha = G_\alpha(0) = \int_0^\infty e^{\alpha s} g(s)ds.$

Demostración. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^t G_\alpha(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds$. Por la regla de Leibniz, obtenemos que

$$F'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(G_\alpha(t-s)|\nabla u(s)|^2\right) ds + G_\alpha(0)|\nabla u(t)|^2. \tag{4.56}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t}G_\alpha(t) = -\alpha e^{-\alpha t}\int_t^\infty e^{\alpha s}g(s)ds + e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^\infty e^{\alpha s}g(s)ds$$

$$= -\alpha G_\alpha(t) - e^{-\alpha t}e^{\alpha t}g(t) = -\alpha G_\alpha(t) - g(t), \tag{4.57}$$

entonces, en (4.56), se tiene

$$F'(t) = \int_0^t \left(-\alpha G_\alpha(t-s) - g(t-s)\right)|\nabla u(s)|^2 ds + G_\alpha(0)|\nabla u(t)|^2. \tag{4.58}$$

Así, derivando (4.32), sigue

$$\Phi_2'(t) = \int_\Omega F'(t)dx = \int_\Omega \left(\int_0^t \left(-\alpha G_\alpha(t-s) - g(t-s)\right)|\nabla u(s)|^2 ds + G_\alpha(0)|\nabla u(t)|^2\right) dx$$

$$= -\alpha\int_\Omega\int_0^t G_\alpha(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx - \int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx + G_\alpha(0)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx$$

$$= -\alpha\Phi_2(t) - \int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx + \bar{g}_\alpha\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx. \tag{4.59}$$

Ahora, de (4.30), resulta

$$\psi'(t) = \frac{\rho}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt}udx + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt}udx + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx + \int_\Omega|\nabla u_t|^2dx$$

$$+ \int_\Omega \nabla u\nabla u_{tt}dx$$

$$= \int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt}udx + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega|u_t|^{\rho+2}dx + \int_\Omega|\nabla u_t|^2dx + \int_\Omega\nabla u\nabla u_{tt}dx. \tag{4.60}$$

Además, de (3.1), se tiene que

$$|u_t|^\rho u_{tt} = \Delta u + \Delta u_{tt} - \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau + \Delta u_t. \tag{4.61}$$

Luego, reemplazando (4.61) en (4.60) y por lo datos de frontera, obtenemos

$$\psi'(t) = \int_\Omega \left(\Delta u + \Delta u_{tt} - \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau) d\tau + \Delta u_t \right) u dx + \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx$$

$$+ \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx$$

$$= - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx$$

$$+ \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_{tt} dx$$

$$= - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx$$

$$+ \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |\nabla u_t|^{\rho+2} dx. \tag{4.62}$$

□

Lema 4.1.4.

$$\chi'(t) = \overline{g} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (1+\overline{g}) \int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx - \overline{g} \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx$$

$$+ \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds \right|^2 dx + \overline{g} \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx - \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx$$

$$- \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g'(t-s) \left(\nabla u(t) - \nabla u(s) \right) ds dx - \frac{\overline{g}}{\rho+1} \int_\Omega |u(t)|^{\rho+2} dx$$

$$- \frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx, \tag{4.63}$$

donde $\quad \overline{g} = \displaystyle\int_0^t g(t-s) ds.$

Demostración. De (4.31), se tiene que

$$\chi(t) = \mathcal{Z}(t) + \mathcal{Y}(t),$$

donde

$$\mathcal{Z}(t) = -\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx \tag{4.64}$$

y

$$\mathcal{Y}(t) = -\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \tag{4.65}$$

Luego, derivando (4.66), obtenemos

$$\mathcal{Z}'(t) = -\int_\Omega \nabla u_{tt}(t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u - \nabla u(s))dsdx$$

$$- \int_\Omega \nabla u_t(t) \int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx - \int_0^t g(t-s)ds \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \tag{4.66}$$

También, derivando (4.65), tenemos

$$\mathcal{Y}'(t) = -\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx - \frac{1}{\rho+1}\int_0^t g(t-s)ds \int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx$$

$$- \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \tag{4.67}$$

Por otra parte, de (4.61), se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_\Omega |u_t|^\rho u_{tt} \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$= \int_\Omega \left(\Delta u + \Delta u_{tt} - \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau + \Delta u_t \right) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))dsdx$$

$$= -\int_\Omega \nabla u \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx - \int_\Omega \nabla u_{tt} \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx$$

$$- \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau \right) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx$$

$$- \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t) - \nabla u(s))dsdx. \tag{4.68}$$

Además,

$$-\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\right)\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx$$

$$=\int_\Omega \left|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\right|^2 dx-\int_0^t g(t-s)ds\int_\Omega \nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx. \quad (4.69)$$

Por lo tanto, de (4.67), (4.68) y (4.69) se obtiene la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}'(t)=&\,\overline{g}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\int_\Omega\nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx-\frac{\overline{g}}{\rho+1}\int_\Omega|u|^{\rho+2}dx\\ &+\overline{g}\int_\Omega\nabla u\nabla u_tdx-\int_\Omega\nabla u_t\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx+\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\right|^2dx\\ &-\overline{g}\int_\Omega\nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx+\int_\Omega\nabla u_{tt}\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx\\ &-\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega|u_t|^\rho u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx. \end{aligned}\quad (4.70)$$

Finalmente, de (4.66) y (4.70) deducimos la identidad (4.63). □

El resultado principal de este trabajo es el siguiente.

Teorema 4.1.1. *Bajo las hipótesis* (A_1) *y* (A_2) *y supongamos que* V *satisface,* $V(0)>0$*. Entonces, la energía asociada al sistema* (3.1) *decae exponencialmente para cero.*

Demostración. De (4.19), para $\delta_1=\frac{1}{4\lambda}$ y $\overline{g}'_\alpha<\frac{\alpha^2}{2\lambda}$, se tiene que

$$e'(t)\leq-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_t|^2dx-(\lambda-\frac{1}{2})(|g'|\Box\nabla u)(t)-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\alpha^2-2\overline{g}'_\alpha\lambda\right)\Phi_1(t). \quad (4.71)$$

Luego, derivando la identidad (4.35), utilizando los lemas 4.1.3 , 4.1.4 y la desigualdad (4.71) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
V'(t) &= e'(t) + \eta\Phi_2'(t) + \varepsilon(\psi'(t) + \chi'(t)) \\
&\leq -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon(\overline{g} - 1)\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - (\lambda - \frac{1}{2})(|g'|\Box\nabla u)(t) - \frac{\lambda}{\alpha}\left(\alpha^2 - 2\overline{g}'_\alpha\lambda\right)\Phi_1(t) \\
&- \alpha\eta\Phi_2(t) - (\varepsilon(1-\bar{g}) - \eta\bar{g}_\alpha)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \eta\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx \\
&- \varepsilon\overline{g}\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx - \varepsilon\left(1-\overline{g}\right)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx \\
&+ \varepsilon\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\right|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \\
&- \varepsilon\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g'(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right)dsdx - \frac{\varepsilon\overline{g}}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx \\
&- \frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx + \frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx. \qquad (4.72)
\end{aligned}
$$

Es claro que

$$
-\varepsilon\left(1-\overline{g}\right)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx \leq \frac{\varepsilon\left(1-\overline{g}\right)}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon\left(1-\overline{g}\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \qquad (4.73)
$$

Además, por la observación 4.1.2, se tiene que

$$
\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx \leq \frac{\varepsilon C}{\rho+1}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx. \qquad (4.74)
$$

Por el lema 4.1.1, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$
\varepsilon\int_\Omega\left|\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\right|^2 dx \leq \varepsilon\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx, \qquad (4.75)
$$

$$
-\varepsilon\overline{g}\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \frac{\varepsilon\overline{g}}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \varepsilon\overline{g}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx, \qquad (4.76)
$$

$$-\varepsilon\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx. \tag{4.77}$$

Por otra parte, del lema 4.1.2, obtenemos

$$-\varepsilon\int_\Omega \nabla u_t\int_0^t g'(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))dsdx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + \frac{\varepsilon b}{2}(|g'|\Box\nabla u)(t), \tag{4.78}$$

$$-\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \leq \frac{\varepsilon C}{2(\rho+1)}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx$$

$$+\frac{\varepsilon b}{2(\rho+1)}(|g'|\Box\nabla u)(t), \tag{4.79}$$

donde, $\quad b = \|g'(\cdot)e^{\alpha\cdot}\|_{L^1(0,\infty)}$.

Por lo tanto, de las estimativas (4.73)-(4.79) se obtiene en (4.72) la siguiente desigualdad:

$$V'(t) \leq -\gamma_1\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx - \gamma_2\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \gamma_3(|g'|\Box\nabla u)(t) - \gamma_4\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx$$

$$-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\alpha^2-2\overline{g}'_\alpha\lambda\right)\Phi_1(t) - \alpha\eta\Phi_2(t) - \frac{\varepsilon\overline{g}}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx, \tag{4.80}$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon\left(3 - 2\overline{g} + \frac{3C}{2(\rho+1)}\right), \qquad \gamma_2 = \varepsilon\left(\frac{3}{4}-\overline{g}\right) - \eta\bar{g}_\alpha,$$

$$\gamma_3 = \lambda - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon b}{2}\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right), \qquad \gamma_4 = \eta - \varepsilon\left(\frac{3}{2}-\overline{g}\right).$$

Por hipótesis, se tiene que

$$-1 < l-1 < -\overline{g} < 0. \tag{4.81}$$

Entonces, de (4.81) se deduce que

$$\begin{cases} -\gamma_1 < -\left[\dfrac{1}{2} - \varepsilon\left(3 + \dfrac{3C}{2(\rho+1)}\right)\right] = -a_1, \\ \\ -\gamma_2 < -\left[\varepsilon\left(l - \dfrac{1}{4}\right) - \eta\bar{g}_\alpha\right] = -a_2, \\ \\ -\gamma_4 < -\left(\eta - \dfrac{3\varepsilon}{2}\right) = -a_4. \end{cases} \tag{4.82}$$

Ahora, considerando $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ con $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{6\left(1+\frac{C}{\rho+1}\right)}$; $\bar{g}_\alpha < \dfrac{\varepsilon(4l-1)}{4\eta}$ con $l > 1/4$; $\eta > \dfrac{3\varepsilon}{2}$ y $\lambda > \dfrac{1}{2} + \dfrac{\varepsilon b}{2}\left(\dfrac{\rho+2}{\rho+1}\right)$, resulta que $a_1, a_2, a_4, \lambda_3 > 0$

Así, de (4.80) y (4.82) obtenemos

$$V'(t) \leq -a_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - a_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \gamma_3(|g'|\Box\nabla u)(t) - a_4 \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx$$

$$- \frac{\lambda}{\alpha}\left(\alpha^2 - 2\bar{g}'_\alpha\lambda\right)\Phi_1(t) - \alpha\eta\Phi_2(t) - \frac{\varepsilon\bar{g}}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx$$

$$\leq -C_1\left(\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right.$$

$$\left. + (|g'|\Box\nabla u)(t) + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)| ds dx\right), \tag{4.83}$$

para alguna constante $C_1 > 0$.

Desde que $(|g'|\Box\nabla u)(t) \geq 0$, por el teorema 4.0.1, existe una constante positiva C, tal que

$$V(t) \leq C\left(\int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right.$$

$$\left. + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx + (|g'|\Box\nabla u)(t)\right). \tag{4.84}$$

Luego, de (4.83) y (4.84) sigue la siguiente ecuación diferencial:

$$V'(t) \leq -\mu V(t),$$

cuya solución es dada por

$$V(t) \leq V(0)e^{-\mu t}, \tag{4.85}$$

con $V(0) > 0 \quad \text{y} \quad \mu = \dfrac{C_1}{C} > 0.$

Finalmente, del teorema 4.0.2, existe una constante $C = \dfrac{V(0)}{m} > 0$, tal que

$$E(t) \leq Ce^{-\mu t}. \tag{4.86}$$

$\square$

Conclusiones

“En el trabajo desarrollado observamos que la disipación fuerte es importante para poder tener el Decaimiento Exponencial.
Usamos el método de Faedo Galerkin para mostrar que el sistema (3.1) está bien puesto, esto es probamos la existencia de soluciones con historia pasada. Analizamos el término no lineal. Debido a que la derivada de la Energía carece de signo, utilizamos técnicas Multiplicativas para el desarrollo del Decaimiento Exponencial del sistema (3.1)”.

Referencia Bibliográfica

[1] R.A. Adams and J.F. Fourier; *Sobolev Space,* Academic Press, Second Edition, Canada 2009.

[2] J. Bergh and J. Löfström; *Interpolation Spaces. An Introduction,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No 223. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] Brezis Häim; *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential,* Springer, New York, 2011.

[4] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingo Cavalcanti; *Iniciação à Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev,* Vol I e II, Maringá, Textode Dpto. Matemática UEM, 2000.

[5] M.M.Cavalcanti, V.N. Domingo Cavalcanti, J. Ferreira, *Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping,* Math. Method Appl.Sci.2001; 24:1043-1053.

[6] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingo Cavalcanti, J.S. Prates Filho, J.A.Soriano, *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping,* Diff.Integral Eqs. (2001); 14(1):85-116.

[7] E.A. Coddington and N, Levinson;*heory of Ordinary Dierential Equations,* Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[8] Dafermos, C.M.; *Asymptotic Stability in Viscoelasticiy,* Arch. Rat. Mech. Anal. Vol 37 (1970), 293-308.

[9] Fabrizio, M. Morro, A., *Mathematical problems in linear viscoelasticity,* SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia 1992; Vol.12.

[10] Ferreira J. y Pereira D.C., *On a hyperbolic degenerate evolution equation with strong dissipation,* International Journal of Mathematic and Mathematical Sciences 1992; 15: 543-552.

[11] Ferreira J. y Rojas M., *On global weak solution of a nonlinear evolution equation in non-cylindrical domain,* Proceeding of the 9th International Colloquium on Differential Equations Ed. Vsp., 1999; 155-162.

[12] Findley, W.N. - Lai, J.S. - Onaran, K. , *Creep and relaxation of Nonlinear viscoelastic materials,* Serie in Appl. Math and Mech. Vol.18, North-Holland, Amsterdam, (1976).

[13] Gao Hong-Jun y Zhao Yu-Juan, *Asymptotic behavior and exponential stability for thermoelastic problem with Localized damping,* Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27 (11); 1557-1568.

[14] Higidio Portillo Oquendo; *Estabilidade para problemas de contaco e materiais mistos,* Tese de doutorado em matemática. UFRJ (IM) R.J.-Brasil, 1999.

[15] Khaled M. Furati, Nasser-eddine Tatar; *Uniform boundedness and stability for a viscoelastic problem,* Applied Math and Computation 2005; 167:1211-1220.

[16] J.E. Lagnese; *Asymptotic energy estimates for Kirchoff plates subject to weak viscoelastic damping,* International Series of Numerical Mathematics, Vol.91. Birhäuser: Verlag, Bassel 1989.

[17] S. Lang; *Analysis II,* 1969.

[18] J.L. Lions, *Quelques Méthodes De Resolution des Problemes aux. Limites Non Linéaires,* Dunod Gauthier Villars, Paris, 1969.

[19] Love AH., *A Treative on Mathematical Theory of Elasticity,* Dover; New York 1944.

[20] L.A. Medeiros, E.A. Mello; *A Integral de Lebesgue,* Instituto de Mat. Quinta Edición UFRJ-Brasil, 2003.

[21] L.A. Medeiros y P.H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parcias,* Textos de Métodos Matemáticos, n 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[22] S. Messaoudi, N.-e.Tatar, *Global existence and asymptotic behavior for a nonlinear viscoelastic problem,* Math. Sci. Rest. J. 2003; 7(4):136-149.

[23] J.E. Muñoz Rivera, E.C. Lapa y R. Barreto, *Decay rates for viscoelastic platter with memory,* Journal of Elasticity 1996; 44:61-87.

[24] Muñoz R., J., *Global smooth solution and uniform rate of decay in nonlinear viscoelasticity,* Reviews in Math. Phys., Vol. 5,6; pp.855-868(1994).

[25] Muñoz Rivera, J. y Pérez Salvatierra, A., *Asymptotic behavior of the energy in partially viscoelastic materials,* Quarterly of Applied Mathematics. 2001; 1009(3):557-578.

[26] Muñoz R., J., *Asymptotic behavior in linear viscoelasticity,* Quarterly on Appl. Math. 1994, Vol. III: 629-648.

[27] A. Pérez Salvatierra; *Decaimento de soluções de equações parcialmente viscoelásticas,* Tesis de Doctorado UFRJ – Brasil 1997.

[28] M. Renardy, W.J. Hrusa, J.A. Nohel; *Mathematical problems in viscoelasticity,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 35, John Wiley and Sons, New York, 1987.

[29] Sallin A. Messaoudi and Nasser–eddine Tatar; *Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation* Nonlinear Analysis 2008; 68: 785-793.

[30] Sallin A. Messaoudi and Nasser–eddine Tatar; *Global existence and asymptotic behavior for a nonlinear viscoelastic problem,* Math. Sci. Rest. J. 2003; 7(4):136-149.

[31] N.-e Tartar, *On a problem arising in isothermal viscoelasticity,* Int. J. Pure Appl. Math. 8(1)(2003): 1-12.

[32] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators,* Springer-Verlag, New York, 1990.

[33] Zuazua, E. ; *Exponential decay for the semilinear wave equations with locally distributed damping,* Commu. Partial Diff. Equations, 15 (2), pp 205-235. 1990

[34] Zuazua, E.; *Exponential decay for the semilinear wave equations with localized Damping in Unbounded Domains,* J. Math Pures et Appl., 70, pp 513 – 529, 1991.

[35] Zuazua E.; *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems,* Asymptotic Analysis 1988; 1: 161 – 185.